

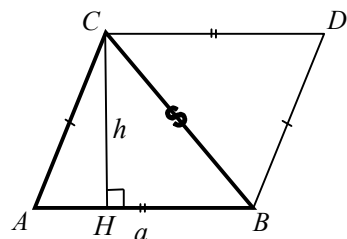
## Формулы площади треугольника.

### Запись, вывод одной из них

Одну из сторон треугольника часто называют его основанием. Если основание выбрано, то под словом «высота» подразумевают высоту треугольника, проведенную к основанию.

**Теорема.** Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Рис. 1



**Дано:**  $\triangle ABC$ ,  $AB = a$ ,  $CH = h$ .

**Доказать:**  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ah$ .

### Доказательство

Достроим треугольник  $ABC$  до параллелограмма  $ABDC$  так, как показано на рисунке 1. Рассмотрим треугольники  $ABC$  и  $DCB$ .

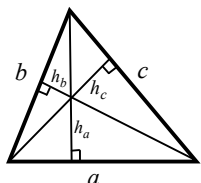
$AC = BD$  и  $AB = CD$  как противолежащие стороны параллелограмма,  $BC$  – общая сторона. Следовательно,  $\triangle ABC = \triangle DCB$  по III признаку равенства треугольников (по трем сторонам).

Равные фигуры имеют равные площади, поэтому  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DCB}$ . По свойству площадей площадь параллелограмма равна сумме площадей треугольников, из которых он составлен, поэтому  $S_{ABDC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle DCB} = 2 S_{\triangle ABC}$ . Значит, площадь  $\triangle ABC$  равна половине площади параллелограмма  $ABDC$ .

Площадь параллелограмма  $ABDC$  равна произведению его основания  $a$  на высоту  $h$ , следовательно,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ah$ .

**Итак,** площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

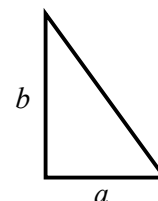
Ч.т.д.



$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c$$

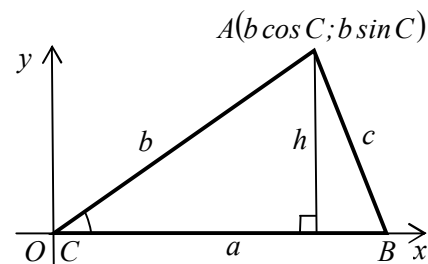
## Площадь прямоугольного треугольника

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.



$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab$$

**Теорема.** Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.



**Дано:**  $\triangle ABC$ ,  $BC = a$ ,  
 $AC = b$ .

**Доказать:**  $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ .

### Доказательство

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы точка  $C$  совпала с началом координат, точка  $B$  лежала на положительной полуоси  $Ox$ , а точка  $A$  имела положительную ординату, тогда вершины треугольника будут иметь координаты  $C (0; 0)$ ,  $B (a; 0)$ ,  $A(b \cos C; b \sin C)$ .

Площадь данного треугольника можно вычислить по формуле  $S = \frac{1}{2} ah$ , где  $h$  – высота треугольника. Но  $h$  равна ординате точки  $A$ , т.е.  $h = b \sin C$ . Следовательно,  $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ .

**Итак,** площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Ч.т.д.

## Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где  $a, b, c$  – стороны треугольника,  
 $p$  – полупериметр треугольника,

$$p = \frac{1}{2} (a + b + c).$$

**Площадь равностороннего треугольника**

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4},$$

где  $a$  – сторона треугольника.

**Площадь треугольника  
через радиус описанной окружности**

$$S = \frac{abc}{4R},$$

где  $a, b, c$  – стороны треугольника,  
 $R$  – радиус описанной окружности.

**Площадь треугольника  
через радиус вписанной окружности**

$$S = rp,$$

$p$  – полупериметр треугольника,  
 $r$  – радиус вписанной окружности.